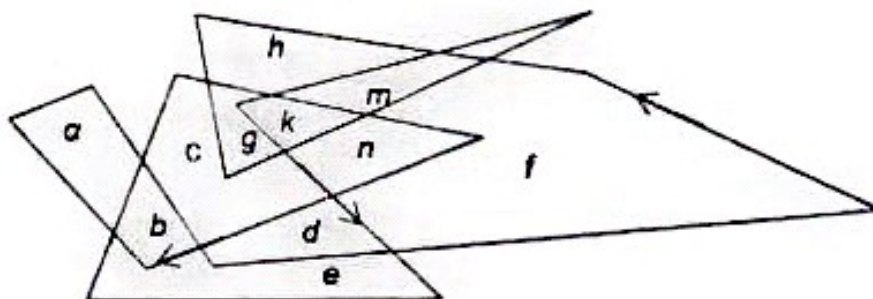


ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ στο μάθημα **ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ I**

- [05]** Να αποδείξετε ότι για κάθε δύο (μη μηδενικούς) μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει η σχέση $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.
- [10]** Να αποδείξετε ότι δύο (μη μηδενικοί) μιγαδικοί αριθμοί a, z ικανοποιούν τη σχέση $|z - a| = |z| - |a|$, **ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ** υπάρχει πραγματικός αριθμός $t \geq 1$ τέτοιος ώστε $z = ta$.
- [10]** Δίνεται η αλυσίδα $c = \gamma_1 + \gamma_2$, όπου γ_1 είναι ο άρνητικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο το σημείο i και ακτίνα $1/2$ και γ_2 ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο το σημείο $-i$ και ακτίνα $1/2$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_c \frac{\sin z + ze^z}{(z+i)^{2015}} dz.$$

- [05]** α) Να δοθεί ο όρισμός του ούσιωδώς άνωμάλου σημείου ως προς μία συνάρτηση.
[05] β) Να δοθεί ο (μαθηματικός) όρισμός του δείκτη στροφής μιας κλειστής καμπύλης ως προς ένα σημείο.
[10] γ) Να βρεθούν οι δείκτες στροφής της παρακάτω καμπύλης ως προς τα σημεία $a, b, c, d, e, f, g, h, k, m, n$ όπως στο σχήμα.



- [15]** Να αποδειχτεί ότι η εικόνα του συνόλου $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2i \ln 2| = |z|\}$ μέσω της συνάρτησης με τύπο $f(z) = \sin(z)$, είναι το σύνολο $\{w = u + iv : 144u^2 + 400v^2 = 225\}$.
- [10]** Να αποδείξετε ότι μία ακολουθία μιγαδικών αριθμών $z_n = x_n + iy_n, n = 1, 2, \dots$ έχει όριο έναν μιγαδικό αριθμό $z_0 = x_0 + iy_0$, **ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ** ισχύουν οι σχέσεις $\lim x_n = x_0$ και $\lim y_n = y_0$.
- [15]** Να δοθεί το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης με τύπο $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ στον δίσκο $B(0, 1)$ και το ανάπτυγμα Laurent στον δακτύλιο $\Delta(i, 0, 2)$.
- [15]** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sin t + \cos t + 2}.$$